

## טורים והתמרות

גיא סלומון

ספר תרגילים זה הינו פרי שנות ניסיון רבות של המחבר בהוראת מתמטיקה באוניברסיטת תל אביב, באוניברסיטה הפתוחה, במכללת שנקר ועוד.

שאלות תלמידים וטעויות נפוצות וחוזרות הולידו את הרצון להאיר את הדרך הנכונה לעומדים בפני קורס חשוב זה.

הספר עוסק בטורים והתמרות והוא מתאים לתלמידים במוסדות להשכלה גבוהה – אוניברסיטאות או מכללות.

הספר מסודר לפי נושאים ומכיל את כל חומר הלימוד, בהתאם לתוכניות הלימוד השונות. הניסיון מלמד כי לתרגול בקורס זה חשיבות יוצאת דופן, ולכן ספר זה בולט בהיקפו ובמגוון התרגילים המופיעים בו.

לכל התרגילים בספר פתרונות מלאים באתר [www.GooL.co.il](http://www.GooL.co.il)  
 הפתרונות מוגשים בסרטוני פלאש המלווים בהסבר קולי, כך שאתם רואים את התהליכים בצורה מובנית, שיטתית ופשוטה, ממש כפי שנעשה בשיעור פרטי. הפתרון המלא של השאלה מכוון ומוביל לדרך חשיבה נכונה בפתרון בעיות דומות מסוג זה.

לדוגמאות: [www.GooL.co.il/linearit.html](http://www.GooL.co.il/linearit.html)

תקוותי היא, שספר זה ישמש מורה-דרך לכם הסטודנטים ויוביל אתכם להצלחה.

גיא סלומון



## תוכן

4	פרק 1 - טורים עם איברים קבועים
4	טור גיאומטרי
4	טור טלסקופי
4	טור הרמוני מוכלל
4	תכונות אלגבריות של טורים
4	מבחן ההתבדרות
5	מבחן האינטגרל
5	מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי
5	מבחן המנה ומבחן השורש
5	מבחן לייבניץ
6	התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי
6	הוכח או הפרך
7	פתרונות
8	פרק 2 - טורי פונקציות וטורי חזקות
8	טורי פונקציות
8	טורי חזקות
10	פתרונות
11	פרק 3 - טור טיילור/מקלורן
13	פתרונות
14	פרק 4 - מספרים מרוכבים

## פרק 1 - טורים עם איברים קבועים

### טור גיאומטרי

(1) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{5^n}{4^{n+2}} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{7^{n+1}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (0.44)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{3^{2n}} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + (-5)^n}{7^n} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-4) \left(\frac{3}{4}\right)^{2n} \quad (4)$$

### טור טלסקופי

(2) בדוק את התכנסות הטורים הבאים. במידה והטור מתכנס, מצא את סכומו.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)(4n-1)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} \quad (1)$$

### טור הרמוני מוכלל

(3) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{5n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^e} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{\sqrt[3]{n^4}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2/3} \quad (4)$$

### תכונות אלגבריות של טורים

(4) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10 + \sqrt{n}}{\sqrt{n}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4^n}{7^{n+1}} + n^{-1.5}\right) \quad (1)$$

### מבחן ההתבדרות

(5) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin n \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arctan n \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 + 2} \quad (4)$$

### מבחן האינטגרל

(6) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+5}} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3} \quad (6) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p \leq 1) \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p} \quad (p > 1) \quad (4)$$

### מבחן השוואה ומבחן השוואה הגבולי

(7) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+10n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \sin^2 n}{n!} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{3^n + 2n} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n} \ln n}{n^2+1} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n^2+1} - n) \quad (7)$$

### מבחן המנה ומבחן השורש

(8) בדוק את התכנסות הטורים הבאים (קבע אם הטור מתכנס או מתבדר):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(2n)^n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n+2)} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1000} e^{-n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)!}{n! \cdot 3^n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(1+n^2)}{n!} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \quad (7)$$

### מבחן לייבניץ

(9) בדוק את התכנסות הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (3) \quad \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln n}{n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{4n+1} \quad (1)$$

### התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

(10) קבע אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2} \quad (1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3} \quad (5) \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \ln n}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n^2+n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+n \ln n}{n^2} \quad (8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}} \quad (7)$$

### הוכח או הפרד

(11) לפניך טענות. אם הטענה נכונה, הוכח אותה. אם לא הבא דוגמה נגדית.

- א. אם  $\sum a_n$  מתכנס ו-  $\sum b_n$  מתבדר אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.
- ב. אם  $\sum a_n$  מתבדר ו-  $\sum b_n$  מתבדר אז  $\sum (a_n + b_n)$  מתבדר.
- ג. אם  $\sum a_n^2$  מתכנס אז  $\sum a_n$  מתכנס בהחלט.
- ד. אם  $\sum a_n$  חיובי ומתכנס אז  $\sum \frac{1}{a_n}$  מתבדר.
- ה. אם  $\sum a_n$  מתכנס אז  $\sum a_n^2$  מתכנס.

**פתרונות**

		(1)
(3) מתבדר	(2) מתכנס ל- $1/3$	(1) מתכנס ל- $11/14$
(6) מתכנס ל- 8	(5) מתכנס ל- $11/12$	(4) מתכנס ל- $-64/7$
		(2)
(3) מתבדר	(2) מתכנס ל- $1/12$	(1) מתכנס ל- $1/2$
		(3)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתכנס
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתבדר
		(4)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתכנס
		(5)
(3) מתבדר	(2) מתבדר	(1) מתבדר
(6) מתבדר	(5) מתבדר	(4) מתבדר
		(6)
(3) מתכנס	(2) מתבדר	(1) מתבדר
(6) מתכנס	(5) מתבדר	(4) מתכנס
		(7)
(3) מתכנס	(2) מתבדר	(1) מתכנס
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתבדר
(9) מתכנס	(8) מתכנס	(7) מתבדר
		(8)
(3) מתכנס	(2) מתכנס	(1) מתבדר
(6) מתכנס	(5) מתכנס	(4) מתכנס
(9) מתכנס	(8) מתכנס	(7) מתכנס
		(9)
(3) מתכנס	(2) מתכנס	(1) מתכנס
		(10)
(3) מתכנס בתנאי	(2) מתכנס בהחלט	(1) מתבדר
(6) מתכנס בהחלט	(5) מתכנס בהחלט	(4) מתכנס בתנאי
(9) מתכנס בתנאי	(8) מתכנס בתנאי	(7) מתכנס בתנאי

## פרק 2 - טורי פונקציות וטורי חזקות

### טורי פונקציות

(1) מצא את תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n} \quad (3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!(x-5)^n} \quad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n+1} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^n \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n-1)} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^4 nx} \quad (4)$$

(2) בדוק התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים בתחום המופיע לידן:

$$(-1 \leq x \leq 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{3/2}} \quad (2) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{4} \leq x \leq 4\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n!}} (x^n + x^{-n}) \quad (4) \quad (-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+x^2}} \quad (3)$$

$$(-\infty < x < \infty) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{1+n^7 x^2} \quad (6) \quad (-a \leq x \leq a) \sum_{n=2}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n} \right) \quad (5)$$

### טורי חזקות

(3) מצא את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים הבאים:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^2} x^n \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} \quad (1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^5}{(2n+1)} x^{2n} \quad (6) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}} \quad (5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin^2 \frac{1}{n} \quad (4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x+1)^n}{n \cdot 4^n} \quad (9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{(2n-2)!} x^n \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3^n} (x-1)^n \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n+1}}{n \cdot 2^{2n+1}} \quad (12) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{n^4 \cdot 100^n} \quad (11) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n (x+5)^n \quad (10)$$



(4) מצא את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות וקבע את תחום ההתכנסות.

$$f(x) = \frac{1}{1+9x^2} \quad (3) \quad f(x) = \frac{3}{1-x^4} \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{1+x} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{x}{9+x^2} \quad (6) \quad f(x) = \frac{x}{4x+1} \quad (5) \quad f(x) = \frac{1}{x-5} \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \quad (9) \quad f(x) = \frac{7x-1}{3x^2+2x-1} \quad (8) \quad f(x) = \frac{3}{x^2+x-2} \quad (7)$$

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (12) \quad f(x) = \ln(1-x) \quad (11) \quad f(x) = \ln(1+x) \quad (10)$$

$$f(x) = \arctan(x/3) \quad (15) \quad f(x) = \frac{x^2}{(1-2x)^2} \quad (14) \quad f(x) = \ln(5-x) \quad (13)$$

#### הערות חשובות:

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצא בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 7,8 עליך להכיר את הנושא "פירוק לשברים חלקיים".
3. לפתרון תרגילים 9,10,14,15 עליך להכיר את הנושא "גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות".

פתרונות

		(1)
$x < 3\frac{9}{10}$ or $x \geq 4\frac{1}{10}$ (3)	$x \neq 5$ (2)	$x > 0$ (1)
$x \neq 0, -1, -2, -3, \dots$ (6)	$x > 0$ (5)	$0 < x \neq \frac{1}{n}$ (4)
		(2)
מתכנס במידה שווה (3)	מתכנס במידה שווה (2)	מתכנס במידה שווה (1)
מתכנס במידה שווה (6)	מתכנס במידה שווה (5)	מתכנס במידה שווה (4)
		(3)
$-0.2 \leq x \leq 0.2, R = 0.2$ (3)	$-\infty < x < \infty, R = \infty$ (2)	$-1 \leq x < 1, R = 1$ (1)
$-1 < x < 1, R = 1$ (6)	$-3 < x \leq -1, R = 1$ (5)	$-1 \leq x \leq 1, R = 1$ (4)
$-5 < x \leq 3, R = 4$ (9)	$-\infty < x < \infty, R = \infty$ (8)	$x = 1, R = 0$ (7)
$-7 < x < -3, R = 2$ (12)	$-9 \leq x \leq 11, R = 10$ (11)	$-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}, R = 4/3$ (10)

		(4)
$( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} 3x^{4n}$ (2)	$( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ (1)	
$( x  < 5) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{5^{n+1}} x^n$ (4)	$( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 9^n x^{2n}$ (3)	
$( x  < 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ (6)	$( x  < \frac{1}{4}) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 4^n x^{n+1}$ (5)	
$( x  < \frac{1}{3}) \sum_{n=0}^{\infty} (2(-1)^n - 3^n) x^n$ (8)	$( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - 1 \right) x^n$ (7)	
$(-1 < x \leq 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ (10)	$( x  < 1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n \cdot x^{n-1}$ (9)	
$( x  < 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ (12)	$(-1 \leq x < 1) \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (11)	
$( x  < \frac{1}{2}) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n (n+1) x^{n+2}$ (14)	$(-5 \leq x < 5) \ln 5 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} (n+1)}$ (13)	
	$( x  \leq 3) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1} (2n+1)}$ (15)	

### פרק 3 - טור טיילור/מקלורן

(1) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x = 0$  (טור מקלורן) של הפונקציות הבאות:  
( היעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח בעמוד 79 )

$$f(x) = \sinh x \quad (3) \quad f(x) = x^2 e^{-4x} \quad (2) \quad f(x) = \sin 2x \quad (1)$$

$$f(x) = 2^x \quad (6) \quad f(x) = \cos^2 x \quad (5) \quad f(x) = \sin^2 x \quad (4)$$

$$f(x) = \arcsin x \quad (9) \quad f(x) = \ln(2 - 3x + x^2) \quad (8) \quad f(x) = x \cos(4x^2) \quad (7)$$

**הערה חשובה:** פיתוח לטור מקלורן של 15 פונקציות נוספות תמצא בשאלה 4 בפרק 2.

(2) מצא את הפיתוח לטור טיילור סביב  $x = x_0$  של הפונקציות הבאות:

$$\left(x_0 = \frac{\pi}{2}\right) f(x) = \sin x \quad (3) \quad \left(x_0 = 2\right) f(x) = \frac{1}{x} \quad (2) \quad \left(x_0 = 1\right) f(x) = \ln x \quad (1)$$

(3) מצא את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס, בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות הבאות  
(נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים):

$$f(x) = \frac{\sin x}{e^x} \quad (3) \quad f(x) = \tan x \quad (2) \quad f(x) = e^{-x^2} \cos x \quad (1)$$

(4) חשב את סכום הטורים הבאים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \cdot n!} \quad (3) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n}{n!} \quad (2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad (1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \quad (6) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \quad (5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad (4)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} \quad (9) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \quad (8) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \quad (7)$$

(5) חשב את ערך הגבול בתרגילים הבאים:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad (1)$$

(6) חשב בשגיאה הקטנה מ- 0.001 :

$$\arctan 0.25 \quad (3) \quad \sin 3^\circ \quad (2) \quad \frac{1}{e} \quad (1)$$

(7) חשב בעזרת  $n$  איברים ראשונים (שונים מאפס) בפיתוח לטור מקלורן והערך את השגיאה בחישוב:

$$(n=4)\ln 1.5 \quad (3) \quad (n=1)\cos 4^\circ \quad (2) \quad (n=3)\frac{1}{\sqrt{e}} \quad (1)$$

(8)

א. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$  עבור  $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ .

ב. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\ln(1+x) \cong x$  עבור  $|x| < 0.01$ .

ג. מהי השגיאה המקסימלית בקירוב  $\cos x \cong 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$  עבור  $|x| \leq 0.2$ .

(9)

א. עבור אילו ערכי  $x$ ,  $\sin x \cong x - \frac{x^3}{3!}$  בשגיאה הקטנה מ- 0.001.

ב. עבור אילו ערכי  $x$ ,  $\arctan x \cong x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7}$  בשגיאה הקטנה מ- 0.01.

(10) חשב בקירוב את האינטגרלים הבאים בשגיאה הקטנה מ-  $\varepsilon$ .

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.5} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \quad (2) \quad (\varepsilon = 0.0001) \int_0^{0.2} \frac{\sin x}{x} dx \quad (1)$$

$$(\varepsilon = 0.001) \int_0^{0.5} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx \quad (3)$$

### הערה לגבי קירובים:

אם מבקשים קירוב שהוא מדויק ל-  $n$  ספרות אחרי הנקודה, אז עלינו לדרוש, שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ-  $0.5 \times 10^{-n}$ . למשל דיוק של שלוש ספרות אחרי הנקודה משמעותו שהערך המוחלט של השגיאה יהיה קטן מ-  $0.5 \times 10^{-3} = 0.0005$ . אני בספר לא השתמשתי בניסוח זה, אך יש המשתמשים בו.

**פתרונות**

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ <p>(3)</p> <p><math>(-\infty &lt; x &lt; \infty)</math></p>	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ <p>(2)</p> <p><math>(-\infty &lt; x &lt; \infty)</math></p>	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ <p>(1)</p> <p><math>(-\infty &lt; x &lt; \infty)</math></p>						
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ <p>(6)</p> <p><math>(-\infty &lt; x &lt; \infty)</math></p>	$\frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ <p>(5)</p> <p><math>(-\infty &lt; x &lt; \infty)</math></p>	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}$ <p>(4)</p> <p><math>(-\infty &lt; x &lt; \infty)</math></p>						
$x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ <p>(9)</p> <p><math>(-1 &lt; x &lt; 1)</math></p>	$\ln 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}}\right) \frac{x^{n+1}}{n+1}$ <p>(8)</p> <p><math>(-1 \leq x &lt; 1)</math></p>	$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{2n} x^{4n+1}}{(2n)!}$ <p>(7)</p> <p><math>(-\infty &lt; x &lt; \infty)</math></p>						
$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - \frac{\pi}{2})^{2n}}{2n!}$ <p>(3)</p> <p><math>(-\infty &lt; x &lt; \infty)</math></p>	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{2^{n+1}}$ <p>(2)</p> <p><math>(0 &lt; x &lt; 4)</math></p>	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$ <p>(2)</p> <p><math>(0 &lt; x \leq 2)</math></p>						
$x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots$ <p>(3)</p>	$x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \dots$ <p>(2)</p>	$1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{25}{24}x^4 - \frac{331}{720}x^6 + \dots$ <p>(4)</p>						
$\ln \frac{3}{2}$ (9)	$\ln 2$ (8)	$\cos 1$ (7)	$\sin 1$ (6)	$\pi/4$ (5)	$2e$ (4)	$\sqrt{e}$ (3)	$e^{-2}$ (2)	$e$ (1)
	$1/3$ (3)				$1/3$ (2)			$1/120$ (1)
	$47/192$ (3)				$\pi/60$ (2)			$53/144$ (1)
								$(\pi/6)^5/5!$ (1)
$\frac{1}{160}$	$\frac{77}{192}$	$\frac{\pi \cdot \pi}{4050}$	$1$	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{8}$			
	$(0.2)^6/6!$ (2)		$(0.01)^2/2$ (2)					
			$ x  < \sqrt[3]{9/100}$ (2)					$ x  < \sqrt[5]{3/25}$ (1)
								$449/2250$ (1)
	$143/576$ (3)				$39/400$ (2)			

## פרק 4 - מספרים מרוכבים

(1) פתור את המשוואות הבאות ומצא את  $z$ .

$$z^2 + 9 = 0 \quad (1) \quad z^2 - 4z + 5 = 0 \quad (2) \quad z^2 - 6z + 13 = 0 \quad (3)$$

(2) חשב:

$$(1) (i\sqrt{2})^6 \quad (2) (i^5 - i^{13})^2 \quad (3) (4+i) - (2+10i) \quad (4) (-4-i)(2-3i)$$

(3) חשב (כתוב את התוצאה בצורה  $z = x + yi$ ):

$$(1) \frac{5}{2+i} \quad (2) \frac{1+i}{1-3i} \quad (3) \frac{i}{1-i} - \frac{1}{(i+1)^2}$$

(4) פתור את המשוואות הבאות ומצא את המספר המרוכב  $z$ :

$$(1) 2z - 6i = \bar{z} - 1 \quad (2) z\bar{z} - 5\bar{z} = 10i \quad (3) (1+i)z^2 + 2z - i + 1 = 0$$

(5) כתוב את המספרים הבאים בצורה קוטבית:

$$(1) 1 + \sqrt{3}i \quad (2) -1 - i \quad (3) -3 - \sqrt{3}i \quad (4) 1 - i$$

$$(5) 1 + i \quad (6) \sqrt{3} - i \quad (7) \sqrt{3}i \quad (8) -8$$

(6) חשב:

$$(1) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{10} \quad (2) (1 + \sqrt{3}i)^9 \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{100}$$

$$(4) \sqrt[5]{-8} \quad (5) \sqrt[3]{1} \quad (6) \sqrt[3]{-8}$$

(7) א. מצא את כל הפתרונות של המשוואה  $z^4 + z^2 + 1 = 0$ .

ב. הראה כי אם  $z$  הוא פתרון של המשוואה מסעיף א אזי:  $z^6 = 1$ .

$$(8) \text{ נתונה המשוואה } z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i.$$

א. מצא את פתרונות המשוואה הנתונה.

ב. הוכח כי החזקה השלישית של כל אחד מפתרונות הנתונה היא מספר ממשי או מספר

מדומה טהור.

$$(9) \text{ פתור את המשוואה } \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$$

(10) א. מצא את שלושת הפתרונות של המשוואה  $z^3 = i$ .

ב. הראה שמכפלת שלושת הפתרונות היא  $i$ .

ג. הראה שאם מעלים בריבוע פתרון כלשהו של המשוואה, התוצאה שווה למכפלת

שני הפתרונות האחרים.

(11) א. פתור את המשוואה  $z^5 = -16(\sqrt{3} - i)$ .

ב. הוכח כי חמשת השורשים מהווים סדרה הנדסית, ומצא את מנת הסדרה.

הערה: סדרה הנדסית היא סדרה מהצורה  $a_1, a_1q, a_1q^2, \dots, a_1q^{n-1}$  כאשר  $q$  מנת הסדרה.

(12) נתון  $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ .

א. מצא את פתרונות המשוואה  $z^3 = w^3$ .

ב. הראה כי מכפלת הפתרונות של המשוואה היא  $w^3$ .

(13) נתונה המשוואה  $(iz + 1)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$ .

א. מצא את פתרונות המשוואה  $z_1$  ו-  $z_2$ .

ב. הראה כי  $\left| \frac{z_1 \cdot z_2}{z_1 + z_2} \right| = \sqrt{3.25}$ .

(14) נתונה המשוואה  $(z - 1)^3 = 1$ . הוכח ששכום שורשיה הוא 3.

(15) נתונה המשוואה  $z^3 = -\sqrt{3} + i$ .

א. מצא את שורשי המשוואה:  $z_1, z_2, z_3$ .

ב. מצא את הסכום  $|z_1|^3 + |z_2|^3 + |z_3|^3$ .

ג. הראה כי הסכום  $(z_1)^9 + (z_2)^9 + (z_3)^9$  הוא מספר מדומה טהור.

(16) נתונה המשוואה  $z^2 + |z|^2 - 2ti = 18s^2$ ,  $z$  הוא מספר מרוכב.

כאשר  $s$  ו-  $t$  הם מספרים ממשיים שונים מאפס.  $z_1$  ו-  $z_2$  הם פתרונות המשוואה.

א. הבע את פתרונות המשוואה באמצעות  $s$  ו-  $t$ .

ב. נתון  $z_1 \cdot z_2 = -18i$ . מצא את הפרמטרים  $s$  ו-  $t$ .

$$(17) \text{ א. פתור את המשוואה } \bar{z} \cdot i + (\bar{z})^2 + |z|^2 + z + \bar{z} = 0$$

ב. אחד מהפתרונות שמצאת בסעיף א., הוא איבר אחרון בסדרה חשבונית שכל איבריה

שונים מאפס. הפרש סדרה זו הוא:  $1 + \frac{1}{16}i$ . האיבר הראשון בסדרה הוא מספר ממשי.

חשב את האיבר הראשון בסדרה.

הערה: סדרה חשבונית היא סדרה מהצורה:  $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n-1)d$

באשר  $d$  נקרא הפרש הסידרה.

$$(18) \text{ נתון: } u = (3 - 2i, 4i, 1 + 6i), v = (5 + i, 2 - 3i, 7 + 2i) \text{ מצא:}$$

$$u \cdot v \quad (3) \quad 2i \cdot u - v \quad (2) \quad 4u + v \quad (1)$$

$$|v| \quad (6) \quad |u| \quad (5) \quad u \cdot u \quad (4)$$



**תשובות:**

$$\cdot -11+10i \text{ (4)} \quad 2-9i \text{ (3)} \quad 0 \text{ (2)} \quad -8 \text{ (1)} \quad \mathbf{(2)} \quad 3\pm 2i \text{ (3)} \quad 2\pm i \text{ (2)} \quad \pm 3i \text{ (1)} \quad \mathbf{(1)}$$

$$\cdot -\frac{1}{2}+i \text{ (3)} \quad -\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i \text{ (2)} \quad 2-i \text{ (1)} \quad \mathbf{(3)}$$

$$\cdot z=i, z=-1 \text{ (3)} \quad z=1+2i, z=4+2i \text{ (2)} \quad z=-1+2i \text{ (1)} \quad \mathbf{(4)}$$

$$\sqrt{12}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right) \text{ (3)} \quad \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right) \text{ (2)} \quad 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ (1)} \quad \mathbf{(5)}$$

$$2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right) \text{ (6)} \quad \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) \text{ (5)} \quad \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \text{ (4)}$$

$$\cdot -1 \text{ (3)} \quad \cdot -2^9 \text{ (2)} \quad \cdot \frac{1}{32}i \text{ (1)} \quad \mathbf{(6)} \quad 8(\cos\pi+i\sin\pi) \text{ (8)} \quad \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right) \text{ (7)}$$

$$\cdot 8^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right) \quad k=0,1,2,3,4,5 \quad \mathbf{(4)}$$

$$\cdot 1^{\frac{1}{5}}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{5}+i\sin\frac{0+2\pi k}{5}\right) \quad k=0,1,2,3,4 \quad \mathbf{(5)}$$

$$\cdot 8^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right) \quad k=0,1,2 \quad \mathbf{(6)}$$

$$\cdot z_1 = cis60^\circ, z_2 = cis240^\circ, z_3 = cis120^\circ, z_4 = cis300^\circ \quad \mathbf{(7)}$$

$$\cdot z=0, z=1, z=-1 \quad \mathbf{(9)} \quad \cdot z_1 = 1+\sqrt{3}i, z_2 = -\sqrt{3}+i, z_3 = -1-\sqrt{3}i, z_4 = \sqrt{3}-i \quad \mathbf{(8)}$$

$$\cdot z_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}i, z_3 = -i \quad \mathbf{(10)}$$

$$\cdot q = cis72^\circ \quad \mathbf{ב.} \quad \cdot z_n = 2cis[30^\circ+(n-1)72^\circ] \quad n=1,2,3,4,5 \quad \mathbf{א.} \quad \mathbf{(11)}$$

$$\cdot 1+(1+\sqrt{3})i, -1+(1-\sqrt{3})i \quad \mathbf{א.} \quad \mathbf{(13)} \quad \cdot z_1 = cis45^\circ, z_2 = cis165^\circ, z_3 = cis285^\circ \quad \mathbf{א.} \quad \mathbf{(12)}$$

$$\cdot 24i \quad \mathbf{ג.} \quad \cdot 6 \quad \mathbf{ב.} \quad \cdot z_3 = \sqrt[3]{2}cis290^\circ, z_2 = \sqrt[3]{2}cis170^\circ, z_1 = \sqrt[3]{2}cis50^\circ \quad \mathbf{א.} \quad \mathbf{(15)}$$

$$\cdot z_1 = 0 \quad \mathbf{א.} \quad \mathbf{(17)} \quad \cdot t=9, s=\pm 1 \quad \mathbf{ב.} \quad \cdot z_2 = -3s-\frac{t}{3s}i, z_2 = -3s-\frac{t}{3s}i \quad \mathbf{א.} \quad \mathbf{(16)}$$

$$\cdot (17-7i, 2+13i, 11+26i) \quad \mathbf{א.} \quad \mathbf{(18)} \quad \cdot a_1 = -8.5 \quad \mathbf{ב.} \quad \cdot z_2 = -0.5+0.5i,$$

$$\cdot \sqrt{92} \quad \mathbf{ג.} \quad \cdot \sqrt{66} \quad \mathbf{ה.} \quad \cdot 66 \quad \mathbf{ד.} \quad \cdot 20+35i \quad \mathbf{ג.} \quad \cdot (-1+5i, -10+3i, -19) \quad \mathbf{ב.}$$